



Génie Mécanique, 5ème Semestre

EXAMEN MIDTERM – MÉCANIQUE VIBRATOIRE

AUTOMNE 2022-2023

DURÉE :1H30MIN

Instructions :

Ne pas retourner cette page avant d'y être autorisé

Avant l'examen

- Placez votre carte d'étudiant CAMIPRO devant vous sur la table.
- Les téléphones portables doivent être éteints et placés dans vos sacs.
- Préparez votre espace de travail. Matériel autorisé :
 - Stylos bleus et/ou noirs, **les stylos rouges et verts sont réservés pour la correction.**
 - Les crayons sont autorisés uniquement pour les dessins.
 - Une calculatrice est autorisée.

Pendant l'examen

- Écrivez et dessinez avec soin. Ce qui est illisible ne sera pas corrigé.
- Des feuilles de papier supplémentaires sont disponibles auprès des assistants.
 - Prenez soin de numérotter et d'indiquer votre nom sur toutes les feuilles de réponse.
- Levez la main si vous avez une question ou si vous souhaitez aller aux toilettes.
- Lors des 15 dernières minutes de l'examen, il est interdit de quitter la salle.
- Lorsque l'examen est terminé, **posez votre stylo**, et restez assis et silencieux jusqu'à ce que nous ayons ramassé TOUTES les copies.

Contenu de l'examen

- Question 1 – 15 points
 - Page 1
- Question 2 – 20 points
 - Page 1
- Question 3 – 30 points
 - Page 2
- Question 4 – 35 points
 - Page 3

QUESTION 1**(15 points)**

On a l'oscillateur de la Figure 1.1 avec $c = \sqrt{2km}$. Si l'on a $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) > 0$:

- i) Ecrire l'amplitude du mouvement $x(t)$ dans le régime permanent..... (5 pts)
 ii) À quel temps t_M on trouve l'amplitude maximale, si $\frac{m}{k} = \frac{2}{\pi^2} \text{ [s}^2\text{]}$? (10 pts)

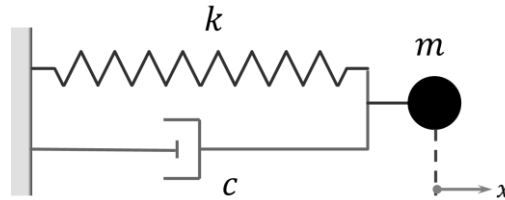


Figure 1.1 | Oscillateur simple.

Solution

- i) Comme $\eta = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, le système est sous-amorti, alors en régime permanent $x(t) = 0$.

- ii) On commence avec l'amplitude

$$x(t) = X e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t - \varphi)$$

On utilise la C.I. pour la position :

$$x(0) = X \cos(\varphi) \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow x(t) = X e^{-\lambda t} \sin(\omega_1 t)$$

Si l'on dérive pour calculer la vitesse et pour trouver le maximum :

$$\dot{x}(t) = X e^{-\lambda t} (-\lambda \sin(\omega_1 t) + \omega_1 \cos(\omega_1 t))$$

$$\dot{x}(t_M) = 0 \rightarrow \tan(\omega_1 t_M) = \frac{\omega_1}{\lambda} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = 1 \rightarrow t_M = \frac{\pi}{4\omega_1} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{m}{2k}} = 0.25 \text{ s}$$

QUESTION 2**(20 points)**

On a un oscillateur amorti comme montré dans la Figure 2.1, avec $\eta = 0.1$. On peut considérer que $\eta^2 \ll 1$ pour les calculs de ce problème. Les conditions initiales sont $x(t = 0) = X_0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0$. La force appliquée sur la masse est (avec $\frac{F_a}{k} = 1 \text{ m}$) :

$$F(t) = F_a(1 + \cos(\omega t)) \cos(\omega t)$$

Calculer :

- i) La moyenne de l'amplitude du mouvement en régime permanent..... (4 pts)
- ii) À quelles fréquences a-t-on du mouvement ? (2 pts)
- iii) Si $\omega = 0.01\omega_0$, pour quelle fréquence trouve-t-on une amplitude maximale ? (4 pts)
- iv) Si $\omega = \omega_0$, calculer les amplitudes pour chaque fréquence..... (5 pts)
- v) Calculer une valeur de ω pour que l'amplitude à 2ω soit la plus large (5 pts)

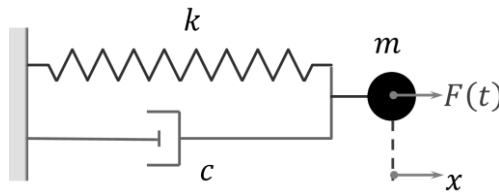


Figure 2.1 | Oscillateur amorti.

Solutions

- i) La force peut être écrite comme :

$$F(t) = \frac{F_a}{2} + F_a \cos(\omega t) + \frac{F_a}{2} \cos(2\omega t)$$

En conséquence, la réponse moyenne sera $\langle x(t) \rangle = \frac{F_a}{2k}$

- ii) On aura du mouvement à ω , 2ω et, dans le transitoire, un mouvement quasi-périodique à ω_1 .

- iii) Si $\omega = 0.01\omega_0$, la réponse pour les trois termes de la force n'est pas amplifiée par le comportement dynamique du système, alors les amplitudes seront :

$$x(t) = \frac{F_a}{2k} + \frac{F_a}{k} \cos(\omega t) + \frac{F_a}{2k} \cos(2\omega t)$$

Alors l'amplitude maximale sera trouvée à ω .

- iv) Dans le cas où $\omega = \omega_0$, on trouve :

$$x(t) \approx \frac{F_a}{2k} + \frac{F_a}{k} \frac{1}{2\eta} \cos(\omega_0 t) + \frac{F_a}{6k} \cos(2\omega_0 t)$$

Alors l'amplitude à ω est $\frac{5F_a}{k}$ et à 2ω est $\frac{F_a}{6k}$

- v) La réponse rapide est pour $\omega = \frac{\omega_0}{2}$. En vrai, Il y aura une gamme de fréquences pour lesquelles on trouvera une amplitude plus large à 2ω . Cela sera donné par

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}} < \frac{1}{2\sqrt{(1 - 4\beta^2)^2 + 16\eta^2\beta^2}}$$

Pour résoudre cela, on peut dire que la gamme sera autour de $\beta = \frac{1}{2}$, $\beta \in [0.388, 0.562]$.

QUESTION 3**(30 points)**

Le système de la Figure 3.1 se compose d'une tige de raideur infinie et de masse $9m$ reliée à une masse ponctuelle m , soutenues par un ressort de raideur k . On trouve une autre masse ponctuelle reliée par un ressort de raideur k au mur et un ressort de couplage entre masses de raideur $4k$.

- i) Combien de DdL a le système ? (1 pts)
- ii) À partir de quels points définirais-tu les variables dynamiques x_1 et x_2 ? (3 pts)
- iii) Ecrire les énergies potentielles et cinétiques du système (8 pts)
- iv) Ecrire les équations de mouvement pour le système (4 pts)
- v) Ecrire les matrices de masses et de rigidités (2 pts)
- vi) Calculer les fréquences propres du système (6 pts)
- vii) Si l'on donne C.I. de $x_1(t=0) = x_0$, et $x_2(t=0) = 0$, et vitesses nulles, décrire qualitativement le mouvement du système (6 pts)

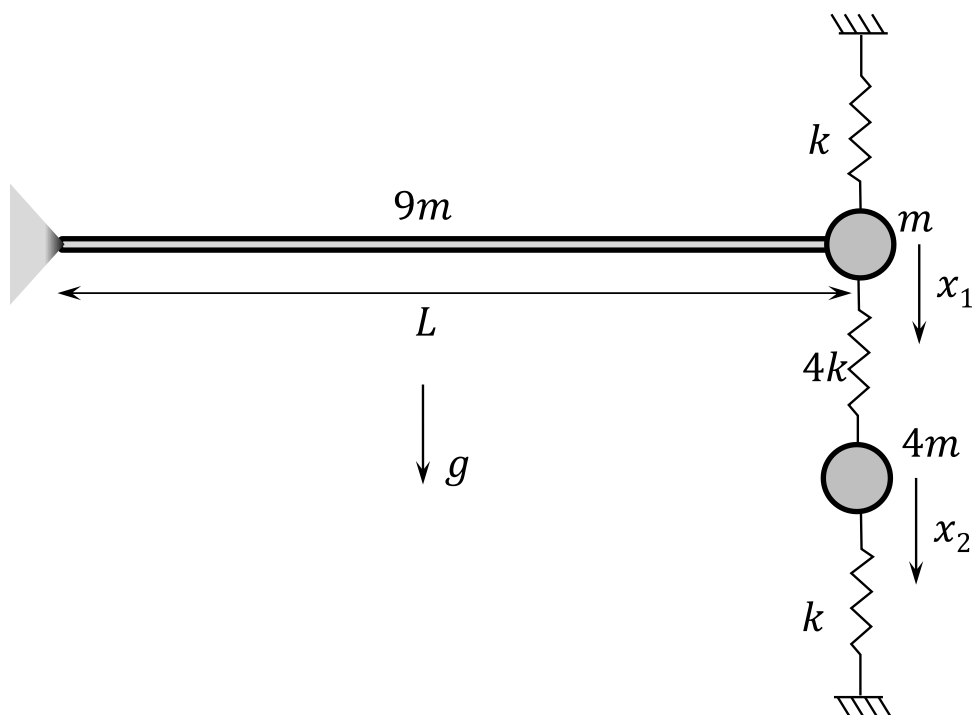


Figure 3.1 | Schéma du système.

Solution

i) 2DdL

ii) Le meilleur est de définir les variables dynamiques à partir des positions d'équilibre de chaque masse : $x_{1,eq}$ et $x_{2,eq}$.

iii)

$$T = \frac{1}{2} \frac{9m}{3} L^2 \frac{\dot{x}_1^2}{L^2} + \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} 4m \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} 4m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

$$V = \frac{1}{2} k (x_1 + x_{1,eq})^2 + \frac{1}{2} k (x_2 + x_{2,eq})^2 + \frac{1}{2} 4k (x_2 + x_{2,eq} - x_1 - x_{1,eq})^2 -$$

$$-mg(x_1 + x_{1,eq}) - 4mg(x_2 + x_{2,eq}) - 9mg \frac{(x_1 + x_{1,eq})}{2}$$

iv)

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right\} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 4m\ddot{x}_1 + k(x_1 + x_{1,eq}) + 4k(x_1 + x_{1,eq}) - 4k(x_2 + x_{2,eq}) - \frac{11}{2}mg = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right\} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 4m\ddot{x}_2 + k(x_2 + x_{2,eq}) + 4k(x_2 + x_{2,eq}) - 4k(x_1 + x_{1,eq}) - 4mg = 0$$

Où les termes de la gravité compensent les termes d'équilibre statique.

v)

$$M = \begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 4m \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 5k & -4k \\ -4k & 5k \end{pmatrix}$$

vi)

Pour calculer les fréquences propres, on peut utiliser l'équation :

$$\det(K - M\omega_i^2) = 0 \rightarrow \det \begin{pmatrix} 5k - 4m\omega_i^2 & -4k \\ -4k & 5k - 4m\omega_i^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(5k - 4m\omega_i^2)^2 - 16k^2 = 0$$

$$\omega_i^2 = \left(\frac{5}{4} \pm \frac{4}{4} \right) \frac{k}{m}$$

$$\omega_I^2 = \frac{k}{m}; \omega_{II}^2 = 9 \frac{k}{m}$$

vii) Si on applique des C.I. non nulles, le système bougera dans les deux fréquences propres jusqu'à l'infini.

QUESTION 4**(35 points)**

J'ai pris mon *Segway* pour venir à l'examen. Des travaux ont eu lieu sur la rue, laissant un profil sinusoïdal sur la chaussée. La vitesse en direction horizontale était constante, v . Le système peut être approximé par le schéma de la Figure 4.1, respecte toujours $c < 2\sqrt{km}$, et l'on considère que l'on est dans le régime permanent.

- i) Combien de DdL a le système ? (1 pts)
- ii) Ecrire la fonction du déplacement vertical de la masse m_{roue} , $y(t)$ (4 pts)
- iii) Ecrire l'équation du mouvement vertical de la masse m , $z(t)$ (10 pts)
- iv) Calculer le déplacement $z(t)$ en fonction des paramètres du problème. (20 pts)

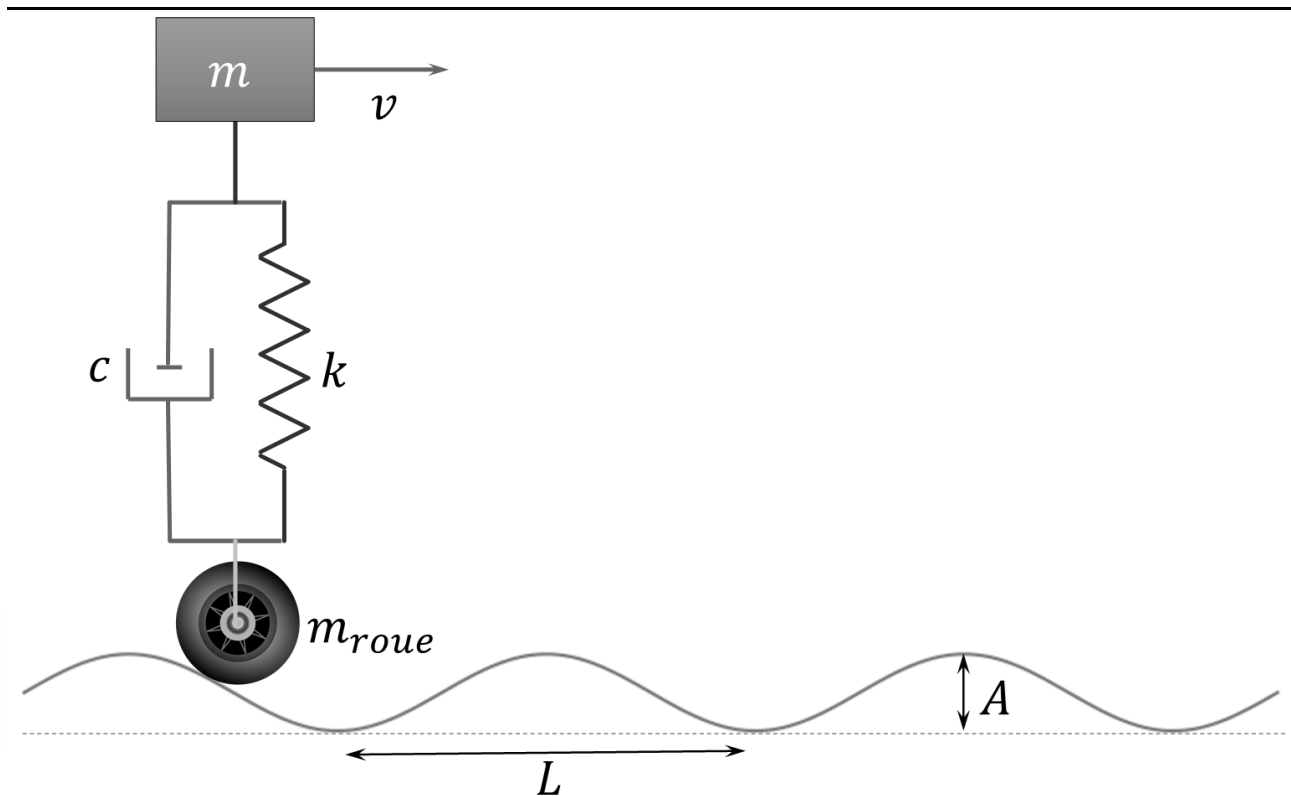


Figure 4.1 | Schéma du *Segway* avec ressort et amortisseur, avec une masse m tel que $c < 2\sqrt{km}$.

Solution

i) 1 DdL

ii)

$$y(t) = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi v}{L} t\right)$$

iii)

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = c\dot{y} + ky$$

iv) Pour résoudre l'équation de mouvement précédente on passe sur notation complexe :

$$\tilde{y} = Y e^{j\omega t}; \tilde{z} = Z e^{j(\omega t - \varphi)}; \omega = \frac{2\pi v}{L}$$

Avec cela, on peut écrire :

$$Z e^{-j\varphi} = Y \frac{k + jc\omega}{k - m\omega^2 + jc\omega} = Y \frac{1 + j2\eta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\eta \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$Z = Y \sqrt{\frac{1 + 4\eta^2 \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2 \beta^2}}; \varphi = \arg\left(\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\eta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j2\eta \frac{\omega}{\omega_0}}\right)$$

Pour finalement avoir :

$$z(t) = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{1 + 4\eta^2 \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2 \beta^2}} \cos\left(\frac{2\pi v}{L} t - \varphi\right)$$